Remarks on seminormal oversemigroups(Semigroups, Formal Languages and Computer Systems)

AUTHOR(S):

金光, 三男; 松田, 隆輝

数理解析研究所講究録
960巻 1996年 77-84

Remarks on seminormal oversemigroups

愛知教育大学教育学部　金光三男(Mitsuo Kanemitsu)
茨城大学理学部　松田隆輝(Ryuki Matsuda)

半群はすべて可換で, cancellative torsion-free で, 演算は加法で書かれていて0を持つとする. 自明な半群 {0} は, 今は除くものとする.

Sを半群とするとき, $q(S)=\{s_1-s_2 \mid s_1, s_2 \in S\}$をSの**商群**という. TがSを含むq(S)の部分半群のとき, TをSの**oversemigroup**という.

今, Tを半群, SをTの部分半群とする. Tの元tがS上**整**(**integral**)とは, ある自然数nが存在して $nt \in S$となるときをいい, S上整であるTの元の全体をS^*と書くとき, S^*をTにおけるSの**整閉包**(**integral closure**)という. SがTにおいて**整閉**(**integrally closed**)であるとは, $S=S^*$のときをいう. 特に$T=q(S)$のとき, SがTにおいて整閉であるとき, Sは**正規**(**normal**)**半群**という. これらの定義などについては[1]を参照して下さい.

定義 1. $G=q(S)$をSの商群とする．Sが**半正規半群**（**seminormal semigroup**）とは，$\alpha\in G$で，$2\alpha\in S$，$3\alpha\in S$なら，$\alpha\in S$が成立するときをいう．

例 1. Sを$(1,0)$，$(1,1)$で$\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$において生成される半群とする．但し，$\mathbf{Z}$は整数環とする．このとき，$S=\{(a,b)\mid a\geqq b,\ a,b\in\mathbf{Z}_0\}$となる．但し，$\mathbf{Z}_0$は負でない整数全体とする．$q(S)=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$である．$\alpha\in q(S)$で$2\alpha\in S$，$3\alpha\in S$とする．$\alpha=(a-c,b-d)$と書ける．但し，$(a,b)$，$(c,d)\in S$である．$2\alpha\in S$より，$a-c\geqq b-d$．よって，$\alpha\in S$．これよりSは半正規半群となる．
$R=k[S]$を体k上Sの半群環とすると，Rは半正規環である．

例 2. kを体とする．代数曲線$y^2=x^3$の座標環を
$R=k[X,Y]/(Y^2-X^3)=k[U^2,U^3]$とする．Sを2，3で生成される$\mathbf{Z}$の半群とすると，$S=\{0,2,3,4,5,6,...\}$となる．$q(S)=\mathbf{Z}$となる．$1\in q(S)$で$2\cdot1\in S$，$3\cdot1\in S$だが，1はSの元ではないのでSは半正規半群ではない．よって$R=k[S]$も半正規環ではない．

例 3. kを体とする．代数曲面$y^2 = xz^2$の座標環を$R = k[X, Y, Z]/(XZ^2 - Y^2) = k[U^2, UV, V]$とする．Sを$(2,0),(1,1),(0,1)$で生成される半群とすると，$S = \{(2a+b, b+c) \mid a, b, c \in \mathbf{Z}_0\}$で，$q(S) = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$である．$(1,0)$はSの元ではないが，$2(1,0) \in S$．$3(1,0)$はSの元ではない．今$\alpha = (m, n) \in q(S)$で$2\alpha \in S$，$3\alpha \in S$とする．$3\alpha \in S$より m，n は負ではない整数である．$m = 2t$とおくと，$\alpha = (m, n) = (m, 0) + (0, n) = t(2,0) + n(0,1) \in S$．また，$m = 2t+1$のとき，nが0でないとき，$\alpha = (m, n) = t(2,0) + (1,1) + (n-1)(0,1) \in S$．$n = 0$とすると，$3\alpha = (3m, 0) = (3t+1)(2,0) + (1, 0)$となり矛盾である．これより$n \neq 0$である．よってSは半正規半群である．従ってRは半正規環である．

注意．例3より，Sは半正規半群でも2－閉（$\alpha \in q(S)$で$2\alpha \in S$のとき，$\alpha \in S$となるときをいう）とは限らない．

次に半群Sのイデアルの定義を復習しよう(cf.[1])．Iは空集合ではないSの部分集合とする．

(1) IがSの**イデアル**とは，$I + S \subset I$のときをいう．

(2) PをSのイデアルとする．$x, y \in S$で$x+y \in P$のとき，$x \in P$又は$y \in P$が成立するとき，PをSの**素イデアル**という．

(3) MをSのイデアルとする．Mが**極大イデアル**とは，$M \neq S$で，且つIがSのイデアルでMを含むときは，$I=S$か又は$I=M$のときをいう．

$M=\{m \in S \mid m$はSの非単元$\}$が空集合でなければ，MはSの唯一つの極大イデアルである．

補題1． (1) $\{S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$をSの半正規 oversemi-groups の directed union とする．このとき$\cup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$は半正規半群である．

(2) Sの半正規 oversemigroups の共通部分はまた半正規 oversemigroup である．

(3) TをSの加法的閉集合とする．Sが半正規半群なら，S_Tもそうである．

(4) Tを torsion-freeアーベル群，Sをその部分半群とする．Mを$M \cup T$の形の付値半群の極大イデアルとする．このとき，半群$S \cup M$が半正規である必要十分条件はSが半正規半群であることである．

例えば，（3）の証明をしてみよう．$\alpha \in q(S_T)$で$2\alpha \in S_T$，$3\alpha \in S_T$とする．このとき，$2\alpha = s - t$，$3\alpha = s' - t$（$s, s' \in S$）となるSの元tがとれる．
$2(\alpha + t) \in S$，$3(\alpha + t) \in S$でSは半正規半群だから，$\alpha + t \in S$となる．よって，$\alpha \in S_T$となる．（4）については，[2, Proposition 3.11]をみて下さい．

定理1． Tを半群とし，Sをその部分半群でSとTのすべての中間半群は半正規であるとする．このとき次のことが成立する．

(1) Tの各元tに対してSの元sが存在して，$s + t$はS上整になる．

(2) BをSの加法的閉部分集合とする．このときS_BとT_Bのすべての中間半群は半正規である．

(3)（[2, Theorem 3.14]）Sは群，又はTはSのover－semigroupである．

定理2． Tを半群，Sをその部分半群とする．このとき次の(1)－(3)は同値である．

(1) SとTの間のすべての半群は半正規である．

(2) $2u, 3u \in T$となる任意の$u \in q(T)$に対して，

$S[2u, 3u]$は半正規半群である.

特に, $T = q(S) = G$のときは次の(3)と(1)(又は(2))は同値となる.

(3) 各$\alpha \in G - S$に対して, αを含まない極大なSのすべてのoversemigroupは半正規半群である.

例えば, (3) ⇒ (1)を証明してみよう. LをSのover-semigroupとする. 任意の$\alpha \in G - L$に対して, ツォルンの補題より, αを含まないLのoversemigroupで極大な半群 L_αが存在する. L_αは半正規半群で$L = \cap L_\alpha$だから, 補題1(2)より, Lは半正規半群となる.

定理3. 次の(1)−(3)は同値である.

(1) Sは半正規半群である.

(2) S^*をSの整閉包とする. 任意の$u \in S^* - S$に対して, Sの$S[u]$における導手は$S[u]$の根基イデアルである.

(3) mが自然数で, $\beta \in q(S)$のとき, m以上の任意の自然数nに対して$n\beta \in S$なら$\beta \in S$である.

例えば, (1)から(2)を証明してみよう. 今, (1)と(3)の同値性はいえたとする. CをSの$S[u]$における導手とする. α

を$S[u]$におけるCの根基の元とする．αがCの元であることを示す．ある自然数nが存在して，$n\alpha \in C$となる．βが$S[u]$の元とすると，負でない任意の整数mに対して，Cは$S[u]$のイデアルだから，$m\alpha + n\alpha \in S[u] + C \subset C$となる．よって，$(m+n)(\alpha+\beta) = (m\alpha + n\alpha) + (m+n)\beta \in S[u] + C \subset C$となる．$C$は$S$のイデアルでもあるから，$(m+n)(\alpha+\beta) \in S$となる．(3)より，$\alpha+\beta \in S$である．よって，$\alpha + S[u] \subset S$であるから$\alpha \in C$となる．これで，$C$は根基イデアルであることがいえた．

次に半群における可逆分数イデアルを定義しよう．

定義 2. Sを半群とし，Iを空集合でない$G = q(S)$の部分集合とする．

(1) IがSの**分数イデアル**とは，次の2つの条件を満たすときをいう．

(i) $S + I \subset I$．

(ii) $r + I \subset S$となるSの元rが存在する．

(2) $I^{-1} = \{\alpha \in G \mid \alpha + I \subset S\}$とおく．$I + I^{-1} = S$のとき，$I$は**可逆分数イデアル**という．

半群における可逆分数イデアルは単項分数イデアルである．

何故なら，$I + I^{-1} = S$ だから $a \in I$ と $b \in I^{-1}$ が存在して $0 = a + b$ となる．任意の I の元 x に対して，$x = x + 0 = x + (a + b) = a + (b + x) \in a + S$ となる．よって $I \subset a + S$ がいえた．逆に，任意の $I + S$ の元 $a + s$ に対して I は S のイデアルだから，$a + S \subset I$．ゆえに $I = a + S$ となり，I は単項分数イデアルであることがいえた．

従って，ピカール群

$\mathrm{Pic}(S) =$ {可逆分数イデアル} ／ {単項分数イデアル}

は (0) となる．

定理 4. $\mathrm{Pic}(S) = (0)$.

参考文献

[1] R.Gilmer, Commutative Semigroup Rings, The Univ. of Chicago, Chicago, 1984.

[2] M.Kanemitsu and R.Matsuda, Note on seminormal overrings, to appear in Houston J. Math. vol. 22 (1996).